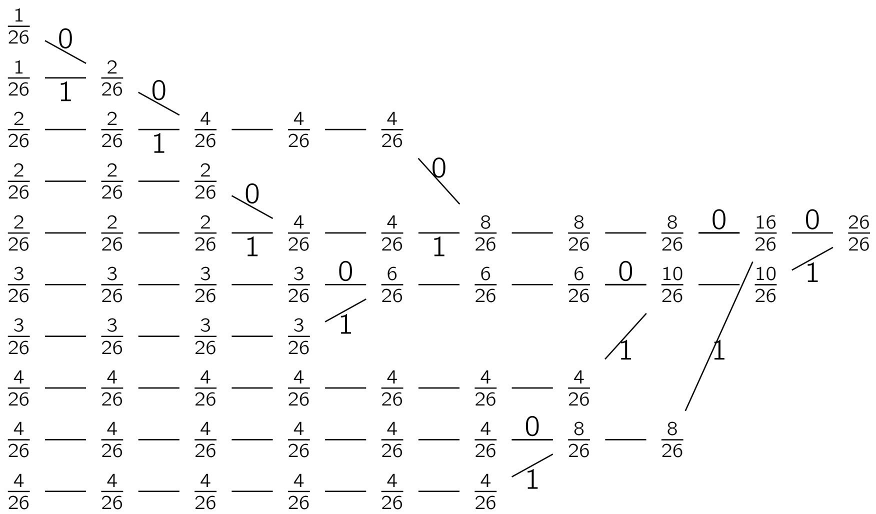
5.1 Wiederholung: LZW- und Huffman-Codierung

Beispiel 5.1 (Huffman-Codierung einzelner Symbole)

Codierung von `BLAUKRAUT_BLEIBT_BLAUKRAUT`:

E	00000
I	00001
K	0001
R	0010
_	0011
L	100
T	101
B	11
A	010
U	011



1110001001100010010010011101001111110000000
000011110100111110001001100010010010011101

$L(\mathcal{C}) = \frac{84}{26} \approx 3{,}231$, $H \approx 3{,}181$

Beispiel 5.2 (LZW-Codierung)

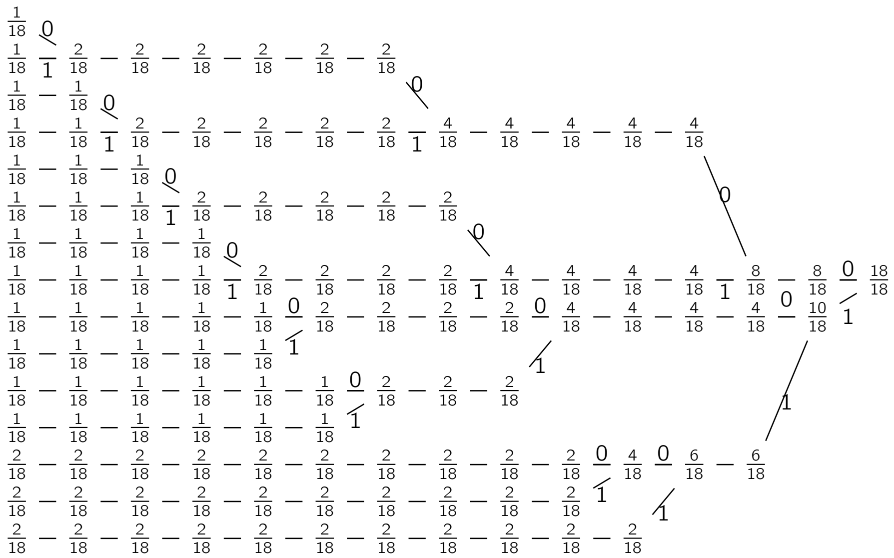
Codierung von BLAUKRAUT_BLEIBT_BLAUKRAUT

Ausgabe der LZW-Codierung	Wörterbuch	
B	0	BL
L	1	LA
A	2	AU
U	3	UK
K	4	KR
R	5	RA
2	6	AUT
T	7	T_
_	8	_B
0	9	BLE
E	10	EI
I	11	IB
B	12	BT
7	13	T_B
0	14	BLA
2	15	AUK
4	16	KRA
6		

Beispiel 5.3 (Huffman-Codierung nach LZW-Codierung)

Codierung von BLAUKR2T_0EIB70246:

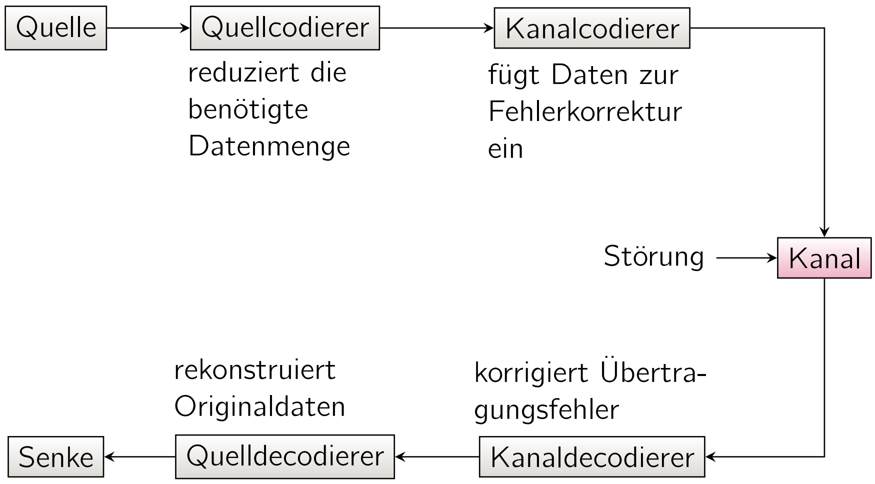
4	0000
6	0001
7	0010
E	0011
I	0100
K	0101
R	0110
_	0111
L	1000
A	1001
U	1010
T	1011
0	1100
2	1101
B	111



11110001001101001010110110110110111
110000110100111001011001101000000001

$L(\mathcal{C}) = \frac{70}{18} = 3{,}889$, $H \approx 3{,}837$

6 Kanäle



Definition 6.1

Eine *Kanal* ist eine stochastische Abbildung von Symbolen $x \in X$ einer Quelle $\mathcal{X}$ auf Symbole $y \in Y$; der Kanalausgang kann als (von $\mathcal{X}$ abhängige) Quelle $\mathcal{Y}$ betrachtet werden.
Der Kanal wird mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $p_{Y|X}(y|x)$, mit der das Symbol x am Kanaleingang auf das Symbol y am -ausgang abgebildet wird, beschrieben.

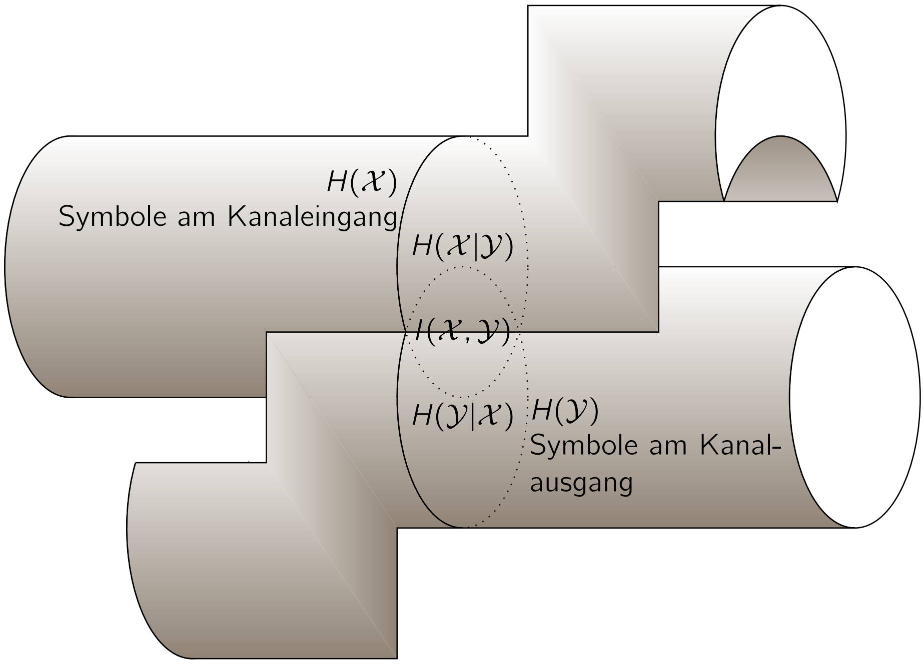
Beispiel 6.1 (Symmetrisch gestörter Binärkanal)

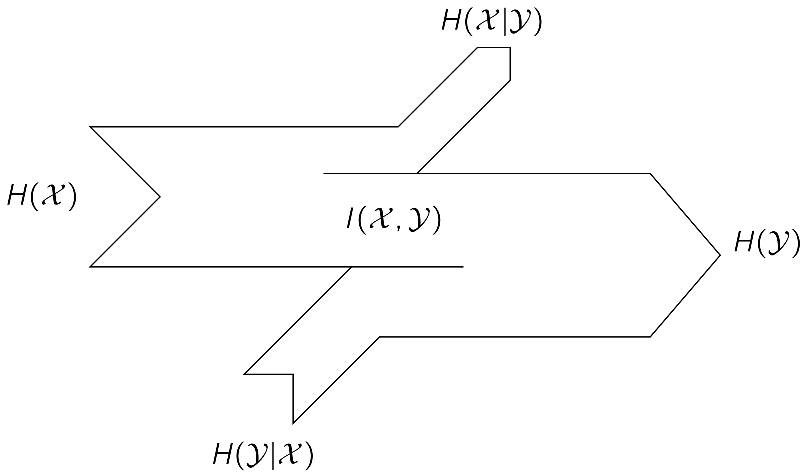
Der symmetrisch gestörte Binärkanal ($X = Y = \{0, 1\}$) hat die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1 - p & \text{falls } x = y \\ p & \text{sonst} \end{cases}$$

mit der Fehlerwahrscheinlichkeit p.

6.1 Bergersches Kanalmodell





$H(\mathcal{X})$	Informationsgehalt der Symbole am Kanaleingang
$H(\mathcal{Y})$	Informationsgehalt der Symbole am Kanalausgang
$H(\mathcal{X}\|\mathcal{Y})$	bei der Übertragung verlorengegangene Information, **Äquivokation**
$H(\mathcal{Y}\|\mathcal{X})$	bei der Übertragung hinzugewonnene, aber in der Regel unerwünschte Information über die Störung, **Irrelevanz**
$I(\mathcal{X},\mathcal{Y})$	**vom Eingang zum Ausgang übertragene Information**

Beispiel 6.2

Wie groß ist die Transinformation $I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = H(\mathcal{Y}) - H(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$ des symmetrisch gestörten Binärkanals mit Fehlerwahrscheinlichkeit p?

1. Bestimme $p_Y(y)$:

$$\begin{aligned} p_Y(0) &= (1-p) \cdot p_X(0) + p \cdot p_X(1) \\ p_Y(1) &= (1-p) \cdot p_X(1) + p \cdot p_X(0) \end{aligned}$$

2. Bestimme $H(\mathcal{Y})$:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{Y}) &= -p_Y(0) \cdot \mathrm{ld}\left(p_Y(0)\right) - p_Y(1) \cdot \mathrm{ld}\left(p_Y(1)\right) \\ &= -\big((1-p) \cdot p_X(0) + p \cdot p_X(1)\big) \cdot \mathrm{ld}\left((1-p) \cdot p_X(0) + p \cdot p_X(1)\right) \\ &\quad - \left((1-p) \cdot p_X(1) + p \cdot p_X(0)\right) \cdot \mathrm{ld}\left((1-p) \cdot p_X(1) + p \cdot p_X(0)\right) \end{aligned}$$

3. Bestimme $H(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) &= -\sum_{x \in \{0,1\}} \sum_{y \in \{0,1\}} p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) \cdot \mathrm{ld}\left(p_{Y|X}(y|x)\right) \\ &= -p_X(0) \cdot (1-p) \cdot \mathrm{ld}(1-p) - p_X(0) \cdot p \cdot \mathrm{ld}(p) \\ &\quad - p_X(1) \cdot (1-p) \cdot \mathrm{ld}(1-p) - p_X(1) \cdot p \cdot \mathrm{ld}(p) \\ &= -\big(p_X(0) + p_X(1)\big) \cdot (1-p) \cdot \mathrm{ld}(1-p) - \big(p_X(0) + p_X(1)\big) \cdot p \cdot \mathrm{ld}(p) \\ &= -(1-p) \cdot \mathrm{ld}(1-p) - p \cdot \mathrm{ld}(p) \end{aligned}$$

4. Bestimme $I(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$:

$$\begin{aligned} I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= H(\mathcal{Y}) - H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) \\ &= -\big((1-p) \cdot p_X(0) + p \cdot p_X(1)\big) \cdot \mathrm{ld}\left((1-p) \cdot p_X(0) + p \cdot p_X(1)\right) \\ &\quad - \left((1-p) \cdot p_X(1) + p \cdot p_X(0)\right) \cdot \mathrm{ld}\left((1-p) \cdot p_X(1) + p \cdot p_X(0)\right) \\ &\quad + (1-p) \cdot \mathrm{ld}(1-p) + p \cdot \mathrm{ld}(p) \end{aligned}$$

Die Transinformation hängt von der Fehlerwahrscheinlichkeit p und der Wahrscheinlichkeitsverteilung p_X der Eingangssymbole ab.

6.2 Kanalkapazität

Definition 6.2

Die Kanalkapazität K eines Kanals ist die größtmögliche Transinformation $I(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ zwischen den Symbolen am Kanaleingang und -ausgang:

$$K = \max_{p_X} I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}). \tag{6.1}$$

Beispiel 6.3

Für den perfekten Kanal mit $X = Y$ und

$$p_{Y|X} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

$$I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = H(\mathcal{Y}) = H(\mathcal{X}),$$

also

$$K = \mathrm{ld}(N)$$

mit der Anzahl von Symbolen N in X.

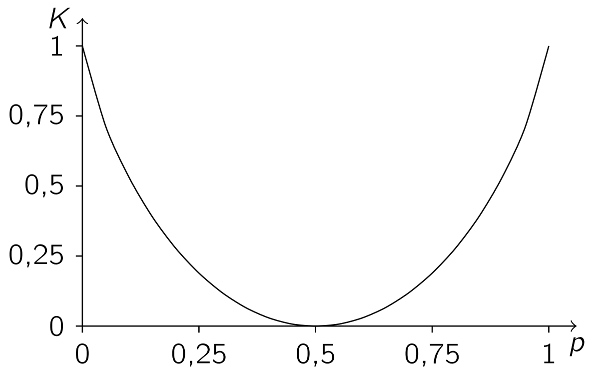
Beispiel 6.4 (Kapazität des symmetrisch gestörten Binärkanals)

Für den symmetrisch gestörten Binärkanal gilt (vgl. Beispiel 6.2)

$$I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = H(\mathcal{Y}) + (1-p) \cdot \mathrm{ld}(1-p) + p \cdot \mathrm{ld}(p). \tag{6.2}$$

Das Maximum wird erreicht, wenn $H(\mathcal{Y})$ maximal wird, was für die Gleichverteilung $p_Y(0) = p_Y(1) = 0{,}5$ mit $H(\mathcal{Y}) = 1$ der Fall ist. Diese ergibt sich für $p_X(0) = p_X(1) = 0{,}5$. Es folgt

$$K = 1 + (1-p) \cdot \mathrm{ld}(1-p) + p \cdot \mathrm{ld}(p). \tag{6.3}$$



Beispiel 6.5 (Kapazität des symmetrisch gestörten Binärkanals mit Störerkennung)

Bei einem Kanal mit Störerkennung gibt es am Kanalausgang das zusätzliche Symbol ?, das eine erkannte Störung anzeigt. Mit der Ausfallwahrscheinlichkeit q und der Restfehlerwahrscheinlichkeit p ergibt sich

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1-p-q & \text{für } x = y \\ p & \text{für } x \neq y, y \neq ? \\ q & \text{für } y = ?. \end{cases}$$

Wir gehen von $p_X(0) = p_X(1) = 0{,}5$ aus, was auch in diesem Fall die Transinformation maximiert.

1. Bestimme $p_Y(y)$:

$$\begin{aligned} p_Y(0) &= (1-p-q)\cdot p_X(0) + p\cdot p_X(1) = (1-q)/2 \\ p_Y(1) &= (1-p-q)\cdot p_X(1) + p\cdot p_X(0) = (1-q)/2 \\ p_Y(?) &= q\cdot p_X(1) + q\cdot p_X(0) = q \end{aligned}$$

2. Bestimme $H(\mathcal{Y})$:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{Y}) &= -p_Y(0)\cdot \operatorname{ld}\left(p_Y(0)\right) - p_Y(1)\cdot \operatorname{ld}\left(p_Y(1)\right) - p_Y(?)\cdot \operatorname{ld}\left(p_Y(?)\right) \\ &= -\frac{1-q}{2}\operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right) - \frac{1-q}{2}\operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right) - q\operatorname{ld}(q) \\ &= -(1-q)\cdot \operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right) - q\operatorname{ld}(q) \end{aligned}$$

3. Bestimme $H(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) &= -\sum_{x\in\{0,1\}}\sum_{y\in\{0,1,?\}} p_X(x)\cdot p_{Y|X}(y|x)\cdot \operatorname{ld}\left(p_{Y|X}(y|x)\right) \\ &= -p_X(0)\big((1-p-q)\cdot \operatorname{ld}(1-p-q) + p\operatorname{ld}(p) + q\operatorname{ld}(q)\big) \\ &\qquad - p_X(1)\big((1-p-q)\cdot \operatorname{ld}(1-p-q) + p\operatorname{ld}(p) + q\operatorname{ld}(p)\big) \\ &= -(1-p-q)\cdot \operatorname{ld}(1-p-q) - p\operatorname{ld}(p) - q\operatorname{ld}(q) \end{aligned}$$

4. Bestimme $I(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$:

$$\begin{aligned}
I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= H(\mathcal{Y}) - H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) \\
&= -(1-q) \cdot \operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right) - q \operatorname{ld}(q) \\
&\qquad + (1-p-q) \cdot \operatorname{ld}(1-p-q) + p \cdot \operatorname{ld}(p) + q \operatorname{ld}(q) \\
&= -(1-q) \cdot \operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right) + (1-p-q) \cdot \operatorname{ld}(1-p-q) + p \operatorname{ld}(p)
\end{aligned}$$

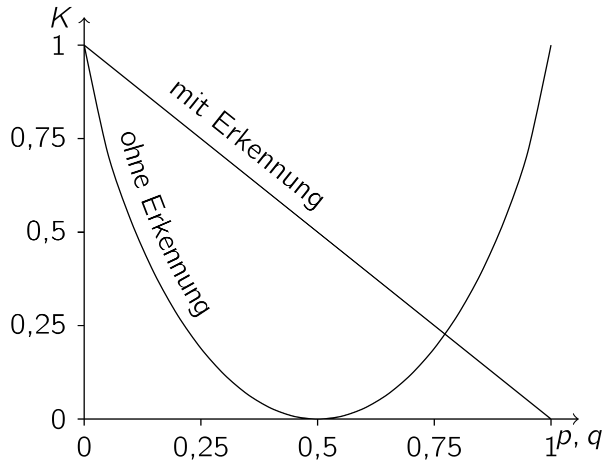
5. Da die gewählte Verteilung p_X die Transinformation maximiert, gilt somit auch

$$K = -(1-q) \cdot \operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right) + (1-p-q) \cdot \operatorname{ld}(1-p-q) + p \operatorname{ld}(p). \tag{6.4}$$

Für den Sonderfall $p = 0$ (keine unerkannten Fehler) gilt

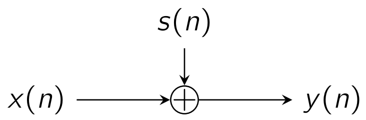
$$\begin{aligned}
K &= -(1-q) \cdot \operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right) + (1-q) \cdot \operatorname{ld}(1-q) \\
&= (1-q)\left(\operatorname{ld}(1-q) - \operatorname{ld}\left(\frac{1-q}{2}\right)\right) = (1-q) \operatorname{ld}(2) = 1-q
\end{aligned}$$

Kapazität des symmetrisch gestörten Binärkanals mit und ohne Störerkennung mit Fehlerwahrscheinlichkeit q bzw. p:



Für die relevanten Fehlerwahrscheinlichkeiten bis 0,5 erlaubt die Störerkennung eine wesentlich höhere Kanalkapazität.

6.3 Exkurs: Analoge AWGN-Kanäle



$x(n)$ Sendesignal am Kanaleingang, Leistung σ_x^2

$s(n)$ Additive, weiße, normalverteilte Störung, Leistung σ_s^2

$y(n)$ Empfangssignal am Kanalausgang, Leistung $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_s^2$

Entropie für kontinuierliche Werte:

- Entropie und abgeleitete Größen lassen sich auf kontinuierliche Alphabete übertragen (informal: ersetze Summen durch Integrale).
- Für eine amplitudenbegrenzte Quelle $\mathcal{X}$ mit der maximalen Amplitude a maximiert die Gleichverteilung die Entropie: $H(\mathcal{X}) = \operatorname{ld}(2a)$
- Für eine *leistungs*begrenzte Quelle $\mathcal{X}$ mit der Leistung σ_x^2 maximiert die Normalverteilung die Entropie: $H(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\operatorname{ld}(2\pi e\sigma_x^2)$

6.3.1 Kapazität des AWGN-Kanals

- Für den AWGN-Kanal ergibt sich $H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\operatorname{ld}(2\pi e\sigma_s^2)$,
- also $I(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = H(\mathcal{Y}) - \frac{1}{2}\operatorname{ld}(2\pi e\sigma_s^2)$,
- was maximiert wird, wenn $\mathcal{Y}$ normalverteilt ist,
- was genau dann der Fall ist, wenn auch $\mathcal{X}$ normalverteilt ist.
- Da $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_s^2$, gilt dann

$$I(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \frac{1}{2}\operatorname{ld}\left(2\pi e(\sigma_x^2+\sigma_s^2)\right) - \frac{1}{2}\operatorname{ld}(2\pi e\sigma_s^2) \tag{6.5}$$

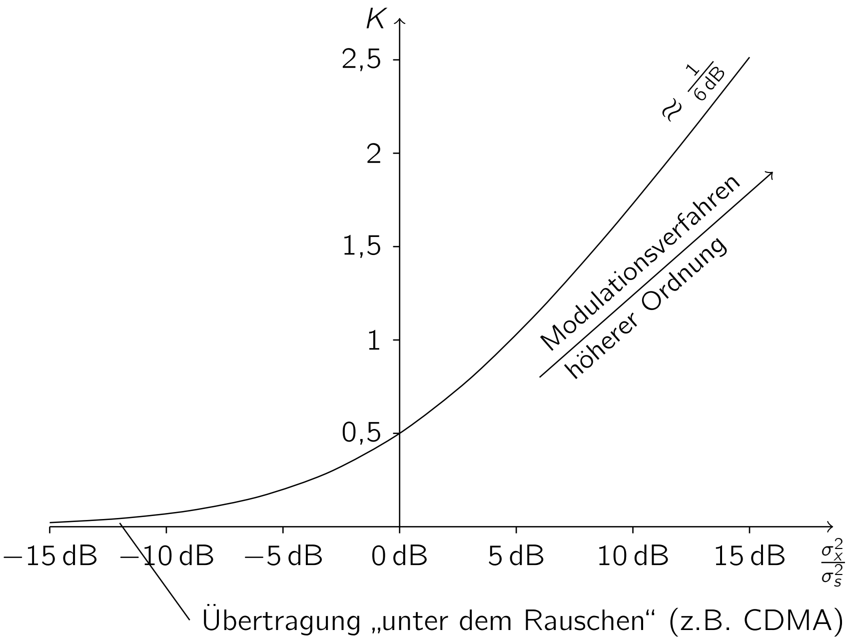
$$= \frac{1}{2}\operatorname{ld}\left(\frac{2\pi e(\sigma_x^2+\sigma_s^2)}{2\pi e\sigma_s^2}\right) \tag{6.6}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ld}\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_s^2}\right) = K, \tag{6.7}$$

- wobei $\frac{\sigma_x^2}{\sigma_s^2}$ gerade das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) angibt!

Ein Kanal der Bandbreite B besitzt die maximale Symbolrate $2B$, also die maximale Übertragungsrate $B\operatorname{ld}\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_s^2}\right)$.

Kapazität des AWGN-Kanals:



6.4 Zusammenfassung

- Ein Übertragungskanal kann mit zwei (abhängigen) Quellen modelliert werden.
- Die Transinformation misst die übertragene Information.
- Die Kapazität des Kanals ist die (über alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Kanaleingangsquelle) maximierte Transinformation.
- Der symmetrisch gestörte Binärkanal ist bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 50% vollständig gestört (Kapazität 0).
- Ein Binärkanal mit Ausfällen statt Fehlern (Störerkennung) hat eine höhere Kapazität.